29th
INTERNATIONAL
MATHEMATICAL
OLYMPIAD
JULY 9-21

French version

## PREMIER JOUR

Canberra, 15 Juillet 1988

1. On se place dans le plan. On considère deux cercles de rayons respectifs $R$ et $r$ ($R > r$) ayant le même centre; $P$ désigne un point fixe du cercle de rayon $r$ et $B$ un point variable du cercle de rayon $R$. La droite $BP$ recoupe le cercle de rayon $R$ au point $C$ et la droite $\ell$, perpendiculaire à la droite $BP$ en $P$, recoupe le cercle de rayon $r$ au point $A$ (si $\ell$ est tangente au cercle, alors $A = P$).
   (I) Trouver l'ensemble des valeurs prises par $BC^2 + CA^2 + AB^2$.
   (II) Trouver l'ensemble des milieux des segments $AB$.

2. Soit $n$ un entier strictement positif; $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ sont $2n+1$ sous-ensembles d'un ensemble $B$. On suppose vérifiées les propriétés suivantes:
   (a) Chaque ensemble $A_i$ contient exactement $2n$ éléments.
   (b) Pour tout $(i, j)$, $1 \leq i < j \leq 2n+1$, $A_i \cap A_j$ contient exactement un élément.
   (c) Tout élément de $B$ appartient à au moins deux des ensembles $A_i$.
   Pour quelles valeurs de $n$ est-il possible d'associer à tout élément de $B$ la valeur 0 ou 1 de telle sorte que, dans chaque ensemble $A_i$, on trouve exactement $n$ éléments affectés de la valeur 0?

3. On désigne par $f$ l'application de l'ensemble des entiers strictement positifs dans lui-même définie par:

$$f(1) = 1, \quad f(3) = 3,$$

et pour tout $n \geq 1$,

$$f(2n) = f(n),$$
$$f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n),$$
$$f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n).$$

Déterminer le nombre des entiers $n$, $1 \leq n \leq 1988$, pour lesquels $f(n) = n$.

Temps accordé: 4h30.

Chaque problème vaut 7 points.

French version

## SECOND JOUR

Canberra, 16 Juillet 1988

4. Montrer que l'ensemble des réels $x$ qui vérifient l'inéquation:

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geq \frac{5}{4}$$

est la réunion d'intervalles disjoints dont la somme des longueurs a pour valeur 1988.

5. $ABC$ est un triangle rectangle en $A$ et $D$ est le pied de la hauteur issue de $A$. La droite joignant les centres des cercles inscrits dans les triangles $ABD$ et $ACD$ coupe respectivement $AB$ et $AC$ en $K$ et $L$.
   On désigne respectivement par $S$ et $T$ les aires des triangles $ABC$ et $AKL$.
   Montrer: $S \geq 2T$.

6. Soient $a$ et $b$ deux entiers strictement positifs tels que $ab+1$ divise $a^2 + b^2$.
   Montrer que $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ est un carré parfait.

Temps accordé: 4h30

Chaque problème vaut 7 points.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail